MATHÉMATIQUES PREMIÈRE COMPOSITION

(Option agronomie — Option biochimie-biologie)

Durée : 3 heures

Soit n un entier naturel fixé, strictement positif.

On note $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, ..., des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout réel p, supérieur ou égal à 1, on note

$$\| X \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose aussi

$$\| X \|_\infty = \operatorname{Sup} \{ |x_i| / 1 \leqslant i \leqslant n \}.$$

On dira que p et p' sont deux réels conjugués si p et p' sont strictement supérieurs à 1 et vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On rappelle *l'inégalité triangulaire* :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

PARTIE 1

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer les inégalités :

1.1. $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \| X \|_1 \| Y \|_\infty$

1.2. $\| X + Y \|_1 \leqslant \| X \|_1 + \| Y \|_1$.

1.3. $\| X + Y \|_\infty \leqslant \| X \|_\infty + \| Y \|_\infty$.

1.4. Si p est un réel supérieur ou égal à 1 :

$$\| X \|_\infty \leqslant \| X \|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \| X \|_\infty.$$

PARTIE 2

Dans toute cette partie, p et p' désignent deux réels conjugués.

2.1. Montrer que : $p' = \dfrac{p}{p-1}$ et $p = \dfrac{p'}{p'-1}$.

En déduire l'équivalence : $p = 2 \Leftrightarrow p' = 2$.

2.2. *a.* Soit $a > 0$ donné.

Étudier la fonction $f_a(x) = \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{p'} a^{p'} - ax$ sur $\mathbb{R}^+$ et tracer sommairement son graphe.

b. En déduire que quels que soient les réels positifs ou nuls α et β, on a :

$$\alpha\beta \leqslant \frac{1}{p} \alpha^p + \frac{1}{p'} \beta^{p'}.$$

2.3. *a.* Soient $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ et $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\| Z \|_p = \| T \|_{p'} = 1$.

Montrer que :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i t_i \right| \leqslant 1.$$

Tournez la page S. V. P.

b. En déduire que quels que soient les vecteurs $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \| X \|_p \, \| Y \|_{p'}.$$

[*On pourra introduire les vecteurs*

$$Z = \left(\frac{x_1}{\| X \|_p}, \frac{x_2}{\| X \|_p}, \ldots, \frac{x_n}{\| X \|_p} \right) \text{ et } T = \left(\frac{y_1}{\| Y \|_{p'}}, \frac{y_2}{\| Y \|_{p'}}, \ldots, \frac{y_n}{\| Y \|_{p'}} \right).]$$

2.4. *a.* Soient $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |t_i| = |z_i|^{p-1}.$$

Montrer que $\| Z \|_p^p = \| T \|_{p'}^{p'}$.

b. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y|^p \leqslant |x| \, |x + y|^{p-1} + |y| \, |x + y|^{p-1}.$$

c. En déduire en appliquant 2.3. *b.* que quels que soient les vecteurs $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\| X + Y \|_p \leqslant \| X \|_p + \| Y \|_p.$$

2.5. Soient p et q deux réels tels que $1 \leqslant p < q < +\infty$ et $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Montrer la relation : $\| X \|_q \leqslant \| X \|_p \leqslant n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| X \|_q$.

[Pour l'inégalité de gauche, on montrera d'abord que

$$\left(\frac{|x_i|}{\| X \|_q} \right)^q \leqslant \left(\frac{|x_i|}{\| X \|_q} \right)^p \quad \text{pour tout} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pour l'inégalité de droite, on introduira le réel $r = \frac{q}{p}$ et on appliquera l'inégalité 2.3.*b.* aux vecteurs $(|x_1|^p, |x_2|^p, \ldots, |x_n|^p)$ et $(1, 1, \ldots, 1)$, avec les réels conjugués r et r'.]

* * *